

Enveloppe convexe de $O_n(R)$

Développement classique où on montre que l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour la norme subordonnée à la norme euclidienne. C'est un développement très abordable, qui rassemble tout un tas de notions du programme.

C'est un développement qui se recase dans beaucoup de leçons, notamment les leçons 157, 158, 159, 161 et 181. Un recasage dans la leçon 152 me paraît douteux, car on n'utilise pas de manière essentielle le théorème spectral (sauf pour la décomposition polaire, mais on ne la démontre pas). Un recasage en 106 est aussi un peu abusé à mon sens.

I - Le développement



Lemme 1

Soit H un espace de Hilbert et C un convexe. Si $x \notin C$, alors il existe $f \in H'$ tel que $f(x) > \sup_{y \in C} f(y)$.

Preuve :

Posons $a = P_C(x)$ la projection de x sur C et posons $f = \langle x - a, \cdot \rangle$. Alors $f \in H'$ et comme $x \notin C$, $f(x - a) > 0$ i.e. $f(x) > f(a)$. Par la caractérisation de l'angle obtus, on a :

$$\forall y \in C, \langle x - a, y - a \rangle \leq 0 \quad \text{i.e.} \quad f(y) \leq f(a).$$

Il en découle l'inégalité :

$$f(x) > f(a) \geq \sup_{y \in C} f(y).$$



Lemme 2

Soit A un ensemble et $C = \text{Conv}(A)$. Alors $x \in \overline{C}$ si et seulement si $\forall f \in H', f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y)$.

Preuve :

La sens réciproque découle directement de la contraposée du premier lemme. Pour le sens direct, considérons $f \in H'$ et $x \in \overline{C}$. On a alors la série d'égalités :

$$f(x) \leq \sup_{y \in \overline{C}} f(y) = \sup_{y \in C} f(y) = \sup_{y \in A} f(y).$$

La première égalité découle de la continuité de f et la seconde découle de la linéarité de f et du fait qu'une combinaison convexe de réels est plus petite que le plus grand de ces réels ($ta + (1-t)b \leq \max(a, b)$).



🦋 Théorème 3

┆ L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ pour la norme subordonnée quadratique est la boule unité.

Preuve :

On a clairement l'inclusion $\overline{\text{Conv}(O_n(\mathbb{R}))} \subset \overline{B}(0, 1)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de norme $\|M\|_2 \leq 1$. D'après les lemmes, il suffit de montrer que pour tout $f \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})'$, $f(M) \leq \sup_{W \in O_n(\mathbb{R})} f(M)$.

Une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})'$ peut s'écrire sous la forme $\text{tr}(\cdot)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, il nous suffit de montrer la condition suivante :

$$\text{tr}(AM) \leq \sup_{W \in O_n(\mathbb{R})} \text{tr}(AW), \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Soit donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons sa décomposition polaire $A = WS$ avec $W \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Par théorème spectral, on peut considérer une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de S , et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (qui sont réelles positives). On a alors :

$$\text{tr}(S) = \text{tr}(AW^{-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

De plus, on a :

$$\text{tr}(AM) = \text{tr}(MA) = \sum_{i=1}^n \langle MAe_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, M^T e_i \rangle \leq \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_2 \cdot \|M^T e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \|Se_i\|_2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(AW^{-1}).$$

Finalement, on a bien notre condition vérifiée, puisque $W^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Il reste alors à montrer que l'enveloppe convexe est fermé (jusqu'ici, nous avons montré que son adhérence est la boule unité), ce qui découle du résultat suivant ($O_n(\mathbb{R})$ est compact).



🦋 Propriété 4

┆ Si K est compact en dimension finie, alors $\text{Conv}(K)$ est encore compact.

Preuve :

Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{S}_{n+1} \times K^{n+1} &\rightarrow \text{Conv}(K), \\ (\lambda, a) &\mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}_{n+1}$ désigne le simplexe $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) : \sum \lambda_i = 1\}$. Par le théorème de Carathéodory, cette application est surjective. De plus, Φ est continue et $\mathcal{S}_{n+1} \times K^{n+1}$ est compact. On en déduit donc, comme l'image d'un compact par une fonction continue est compacte, que $\text{Conv}(K)$ est compact.



II - Remarques

1 - Je suis passé le jour J sur ce développement pour la leçon 181 (l'autre dév était le théorème de Krein-Milman). Niveau temps, cela rentrait pile poil. On m'avait demandé de démontrer la forme avec la trace pour

les formes linéaire sans utiliser Riesz (démonstration classique qui fonctionne sur tout corps). Il m'a été aussi posé comme question de réinterpréter la construction du lemme 1 (je n'avais pas trop compris, avec un dessin c'est en fait des lignes de niveaux). On m'avait aussi demandé de démontrer la décomposition polaire, et la différence entre le cas inversible et non inversible. Enfin, on m'avait demandé de réexpliquer l'argument du lemme 2.

2 - Je pense vraiment qu'il y a le temps de tout faire proprement. Si vous êtes vraiment lent (et c'est pas grave), vous pouvez toujours mettre la proposition 4 dans votre plan, et ne pas la démontrer.

III - Références

[Szp] : *Mathématiques L3 Algèbre*, Aviva Szpirglas